הרצאה 12, 18.6.26

הערה 1: לכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ קיימים $r>0$ ו-

$0\le\theta<2\pi$ כך ש-

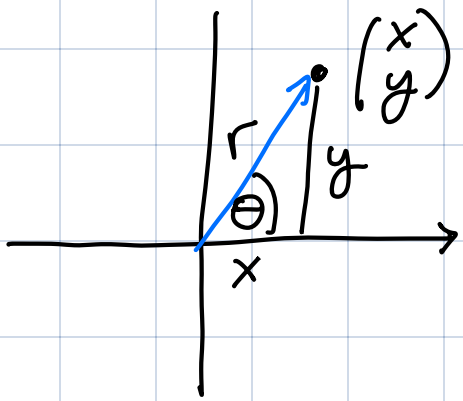
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

בנוסף, נשים ♡ כי $r=\sqrt{x^2+y^2}$

וגם $tg\theta=\frac{y}{x}$ (לפי אלו $x>0$ ו- $y\ge0$)

נשים ♡ גם כי $\lim\limits_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} x=0$ וגם $\lim\limits_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} y=0$

אומר $\lim\limits_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} r=0$



תרגיל 1: נבדוק הפונקציה המוגדרת ע"י

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \end{cases}, \forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

קבעו האם F רציפה ב- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ באמצעות מעבר לקואורדינטות פולריות.

<u>פתרון:</u> נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$\lim_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lim_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\theta\cdot r\sin\theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} r\cos^2\theta\sin\theta \overset{\text{חסום}}{=} 0 = F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל ב:</u> נתון הפונקציה המוגדרת ע"י

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \end{cases}, \quad \forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

קבעו האם F רציפה ב- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ באמצעות מעבר לקואורדינטות פולריות.

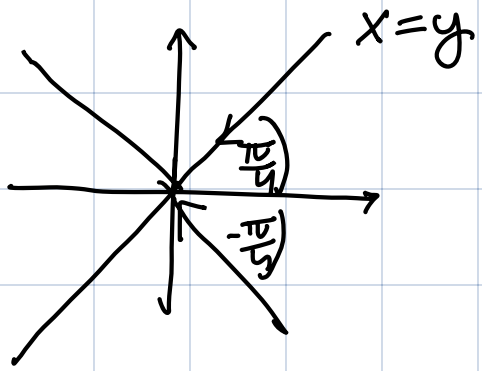
<u>פתרון:</u>

בתרגיל נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} F\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \cos\theta\sin\theta = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} & \theta = \frac{\pi}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} & \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$



הגדרה: תהי $\vec{F}:D\to\mathbb{R}^m$ כאשר $\phi\neq D\subseteq\mathbb{R}^n$

תהי $\vec{x}_0\in D$ ונניח כי $\vec{F}$ מוגדרת בסביבה

של $\vec{x}_0$. הנגזרת החלקית של $\vec{F}$ ב- $\vec{x}_0$

מוגדרת לפי:

$$F'_{x_j}(\vec{x}_0) = F_{x_j}(\vec{x}_0) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{F}(\vec{x}_0+h\vec{e}_j)-F(\vec{x}_0)}{h}$$

תרגיל 3: יהי $a\in\mathbb{R}$ ונגדיר פונקציה המוגדרת ע"י

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}\dfrac{x^2y+xy}{x^2+y^2} & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ a & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases},\quad \forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

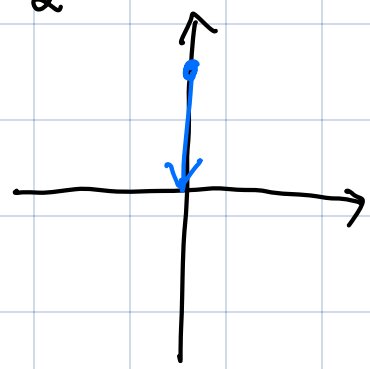
הוכיחו או הפריכו:

(א) קיים $a\in\mathbb{R}$ שעבורו F רציפה ב- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

פתרון: נשים ♡ כי

$$\lim_{\substack{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ x=0}} F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lim_{y\to0}\frac{0+0}{y^2}=0$$

$$\lim_{\substack{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ y=x}} F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+x^2}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}$$



אין אף קיים ערך של $a\in\mathbb{R}$

שעבורו F רציפה ב- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

ב) קיים $a\in\mathbb{R}$ שעבורו $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ קיימים ב- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

<u>פתרון:</u> נחשב לפי הגדרה

$$\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)-F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F\begin{pmatrix}h\\0\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-a}{h}$$

$$=\begin{cases}\text{אי קיים} & a\neq 0\\ 0 & a=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)-F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F\begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-a}{h}$$

$$=\begin{cases}\text{אי קיים} & a\neq 0\\ 0 & a=0\end{cases}$$

לכן עבור $a=0$ הנגזרת החלקית קיימת.

תרגיל 4: עבור כל אחת מהפונק' הבאות, חשבו את הנגזרות החלקיות בכל נק'

א) $f(x,y) = x^2y$ כאשר $x,y\in\mathbb{R}$

פתרון:

$$f_x(x,y)=2xy \quad , \quad f_y(x,y)=x^2$$

ב) $f(x,y) = \sin x \cdot \cos y$ כאשר $x,y\in\mathbb{R}$

פתרון:

$$f_x(x,y)=\cos x\cos y \quad , \quad f_y(x,y)=-\sin x\sin y$$

ג) $f(x,y) = x^2y + xy^2 + \frac{1}{x} + \ln|1+x^2+y^2|$

כאשר $x,y\in\mathbb{R}$

פתרון:

$$f_x(x,y) = 2xy+y^2-\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = x^2+2xy+\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

ד) $\vec{F}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y^2\\2-xy-x\end{pmatrix}$ כאשר $x,y\in\mathbb{R}$

$$\vec{F}_x\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-y-1\end{pmatrix},\quad \vec{F}_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\-x\end{pmatrix}$$ פתרון:

ב) $f(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ לכל $t\in\mathbb{R}$

$$f'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$ פתרון:

1) $f(x,y,z)=xy^2z^3$ לכל $x,y,z\in\mathbb{R}$.

$$f_x=y^2z^3,\quad f_y=2xyz^3,\quad f_z=3xy^2z^2$$ פתרון:

תרגיל 5: נתון הפונקציה המוגדרת ע"י

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\[2ex] 0 & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases},\quad \forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

א) חשבו את $\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ לכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$

ב) חשבו את $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ לכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$

פתרון:

(א) עבור $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ נשתמש בהגדרה:

$$F'_x\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\lim_{h\to 0}\frac{F\begin{pmatrix}h\\0\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{\sqrt{h^2}}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h\cdot|h|}=\lim_{h\to 0}h\cdot\frac{h}{|h|}\overset{\text{תא"מ}}{=}0$$

אחרת אם $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$,

$$F'_x\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}0 & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ \dfrac{3x^2\sqrt{x^2+y^2}-(x^3+y^2)\cdot\overbrace{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2} & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

(ב)

(א) עבור $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ נשתמש בהגדרה:

$$F'_y\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\lim_{h\to 0}\frac{F\begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{\sqrt{h^2}}-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h\cdot|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|} = \begin{cases} 1 & h\to 0^+ \\ -1 & h\to 0^- \end{cases}$$

= לא קיים

אם $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$F'_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2y\sqrt{x^2+y^2} - (x^3+y^2)\cdot \overset{2y}{\cancel{2\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2}$$

הגדרה: הנגזרת החלקית מסדר שני של $\vec{F}$ מוגדרת ע"י:

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x_0}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x_i}\right)(\vec{x_0}) \quad , \quad \forall \; i,j$$

נסמן גם $F''_{xy} = F_{xy} = (F_x)_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

תרגיל 6: עבור כל אחת מהפונק' הבאות, חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר שני בכל נק' $x,y \in \mathbb{R}$

(א) $f(x,y) = xe^y$

פתרון:

$f_x = e^y \, , \quad f_y = xe^y$

$f_{xx} = 0 \qquad f_{yy} = xe^y$

$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y) = e^y$

$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(e^y) = e^y$

(ב) $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y^2 \\ 2-xy-x \end{pmatrix}$ לכל $x,y \in \mathbb{R}$

פתרון:

$$\vec{F}_x\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-y-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_y = \begin{pmatrix}2y\\-x\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{yy} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{F}_{xx} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$F_{yx} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \qquad F_{xy} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

ג) $f(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ כאשר $t\in\mathbb{R}$

פתרון:

$$f''(t) = \begin{pmatrix}-\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$$

משפט 1: נניח כי $\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$ ו- $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ רציפים ב- $\vec{x}_0$. אז:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)$$

הוכחה: פעם נוכיח ☺

תרגיל 7: נתון הפונק'

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

א) חשבו את f_x ו- f_y בכל נק'

ב) חשבו את f_{xy} ו- f_{yx} ב- $(0,0)$

ג) הוכיחו או הפריכו: f_{xy}, f_{yx} שתיהן רציפות ב- $(0,0)$.

פתרון:

א) נחשב:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

לכל $(x,y)\neq(0,0)$,

$$f_x(x,y) = y\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) + xy \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2} \cdot \frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = x\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) + xy \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2} \cdot \frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

ג

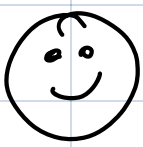
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\,\mathrm{arctg}(1)-0}{\cancel{h}} = \frac{\pi}{4}$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,\mathrm{arctg}(-1)-0}{h} = -\frac{\pi}{4}$$

ד) כן כי לא שווים.



הגדרה: יהי $\vec{u}\neq\vec{0}$ $\in\mathbb{R}^n$. הנגזרת הכיוונית של $\vec{F}$ ב- $\vec{x}_0$ בכיוון $\vec{u}$ מוגדרת ע"י:

$$D_{\vec{u}}(\vec{F})(\vec{x}_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{F}(\vec{x}_0+h\vec{u})-\vec{F}(\vec{x}_0)}{h\cdot\|\vec{u}\|}$$

הערה 2: מתקיים $D_{\vec{e}_j}(\vec{F})=\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{x}_j}$. לכן הנגזרת הכיוונית היא הכללה של הנגזרות החלקיות.

הערה 3: נשים לב שעבור $\vec{v}=\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ מתקיים

(i) $\|\vec{v}\|=1$

(ii) $D_{\vec{v}}(\vec{F})(\vec{x}_0)=D_{\vec{u}}(\vec{F})(\vec{x}_0)$, שכן

$$D_{\vec{u}}(\vec{F})(\vec{x}_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{F}(\vec{x}_0+h\vec{u})-\vec{F}(\vec{x}_0)}{h\cdot\|\vec{u}\|}\underset{t=h\|\vec{u}\|}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\vec{F}(\vec{x}_0+t\cdot\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})-F(\vec{x}_0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\vec{F}(\vec{x}_0+t\vec{v})-F(\vec{x}_0)}{t\cdot\underbrace{\|\vec{v}\|}_{=1}}=D_{\vec{v}}(\vec{F})(\vec{x}_0)$$

לכן הנגזרת הכיוונית תלויה רק בכיוון של $\vec{u}$ (ולא בנורמה שלו)

תרגיל 8: נגזרת בכיוון

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

חשבו את $D_{\vec{u}}(\vec{F})(0,0)$ עבור $\vec{u}=(1,1)$

פתרון:

$$D_{\vec{u}}(F)(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(h(1,1))-F(0,0)}{h\cdot\sqrt{2}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(h,h)-F(0,0)}{h\cdot\sqrt{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{2h^2}-0}{h\cdot\sqrt{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{1/2}{h\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\begin{cases}\infty & h\to 0^+\\ -\infty & h\to 0^-\end{cases}$$

= אי קיום הגבול הדרוש

הגדרה: תהי $D\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהי $\vec{F}:D\to\mathbb{R}^m$. תהי $\vec{x_0}\in D$

הנגזרת של $\vec{F}$ היא מטריצה מסדר $m\times n$

ומסומנת ב- $D_{\vec{F}}(\vec{x_0})=D(\vec{F})(\vec{x_0})$

$$\left[D_{\vec{F}}(\vec{x_0})\right]_{ij}=\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x_0}),\quad \forall\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$$

כאשר $\vec{F}=\begin{pmatrix}F_1\\ \vdots\\ F_m\end{pmatrix}$

תרגיל 9: חשבו את הנגזרת של אחת

מהפונק' הבאות:

(א) $f(x,y) = x^2 + y^3$ עבור $x,y \in \mathbb{R}$

פתרון:

$$D(f)(x,y) = (2x,\ 3y^2)$$

(ב) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ עבור $x,y \in \mathbb{R}$

$$D(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

(ג) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+x+z^2 \\ 1-y \\ xz \end{pmatrix}$ עבור $x,y,z \in \mathbb{R}$.

$$D(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2z \\ 0 & -1 & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

(ד) $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 2x \\ 3y \end{pmatrix}$ עבור $x,y \in \mathbb{R}$

פתרון:

$$D(\vec{F})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & x\\ 2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

ב) $\vec{G}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u+3v\\ 2v-vw\end{pmatrix}$ לכל $u,v,w\in\mathbb{R}$.

פתרון:

$$D(\vec{G})\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 2-w & -v\end{pmatrix}$$

1) מצאו את $\vec{G}\circ\vec{F}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ותשבו את $D(\vec{G}\circ\vec{F})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

פתרון:

$$\vec{G}\circ\vec{F}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{G}\left(\vec{F}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\vec{G}\begin{pmatrix}xy\\2x\\3y\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}xy+6x\\4x-6xy\end{pmatrix}$$

$$D(\vec{G}\circ\vec{F})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+6 & x\\ 4-6y & -6x\end{pmatrix}$$

נבדוק:

$$D(G)\left(F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\cdot D(F)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 2-3y & -2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & x\\ 2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}y+6 & x\\ 4-6y & -6x\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל 10</u>: תהי $x_0\in\mathbb{R}$ ותהי f פונק' המוגדרת בסביבה של x_0. הוכיחו כי f גזירה ב- x_0 אם"ם קיים $a\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)}{|x-x_0|}=0$$

יתר על כן, במקרה זה $a=f'(x_0)$.

<u>בתרגיל</u>: בHW11Q2 בגינפ' 1.

הגדרה: תהי $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r>0$. הכדור הפתוח ברדיוס r שמרכזו $\vec{x}_0$ מוגדר ע"י:

$$B_r(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < r\}$$

סביבה של $\vec{x}_0$ מוגדרת להיות כדור פתוח המכיל את $\vec{x}_0$ (לפחות קווקיל במרכז)

הגדרה: תהי $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^m$ ותהי $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ נאמר שיש $\vec{F}$ מוגדרת בסביבה של $\vec{x}_0$. נאמר כי $\vec{F}$ גזירה ב- $\vec{x}_0$ אם קיימת $A \in M_{m\times n}$ כך ש-

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{\vec{F}(\vec{x})-\vec{F}(\vec{x}_0)-A\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|x-x_0\|} = \vec{0} \in \mathbb{R}$$

משפט ב: אם $\vec{F}$ גזירה ב- $\vec{x}_0$ אזי $D_{\vec{F}}(\vec{x}_0)$ קיימת ו- $A = D_{\vec{F}}(\vec{x}_0)$

הוכחה: אין נרכית ☺

משפט 3: אם $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}_j}$ רציפות ב- $\vec{x}_0$ אז

$1 \le j \le n$, אזי $\vec{F}$ גזירה ב- $\vec{x}_0$.

הערה: זו נכונה ☺

תרגיל: נגזר בפונק'

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \end{cases}, \quad \forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(א) חשבו את $D_F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ בכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

(ב) הראו האם F גזירה ב- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

הגדרה: תהי $D\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהי $F:D\to\mathbb{R}$.

תהי $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ ונניח כי F מוגדרת בסביבה

של $\vec{x}_0$. **הגבול** של F מוגדר ע"י

$$\nabla F(\vec{x}_0) = \left[D_F(\vec{x}_0)\right]^t$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

<u>דוגמא:</u>

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xy + z^2 x + y.$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} y + z^2 \\ x + 1 \\ 2xz \end{pmatrix}$$

$$D_F = \left(y + z^2,\ x + 1,\ 2xz\right)$$

<u>משפט:</u> תהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ויהי $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ וקטור יחידה. אם f_x, f_y רציפות ב- $\vec{x}_0$ אזי

$$D_{\vec{u}}(f)(\vec{x}_0) = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle.$$

$$= f_x \cdot a + f_y \cdot b$$

כאשר $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

דוגמא: תהי

$$f(x,y) = x \cdot y^2 \,,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

חשבו את $D_{\vec{u}}(f)(x,y)$ עבור $\vec{u}=(2,3)$